LIV Olimpiada matemática Española (Concurso Final)

Enunciados y Soluciones

1. Determina todos los enteros positivos x, tales que $2x+1$ sea un cuadrado perfecto, pero entre los números $2x+2, 2x+3, \cdots, 3x+2$, no haya ningún cuadrado perfecto.

Solución. Sea n un número entero tal que $2x+1 = n^2$ y $n^2 \leq 3x+2 < (n+1)^2$. De la primera ecuación se obtiene $x = (n^2-1)/2$ y sustituyendo este valor en la doble desigualdad, resulta

$$n^2 \leq \frac{3n^2+1}{2} < n^2+2n+1 \Leftrightarrow 2n^2 \leq 3n^2+1 < 2n^2+4n+2$$

En la última expresión la primera desigualdad se cumple para todo n entero, la segunda puede escribirse como

$$n^2-4n-1 < 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{5} < n < 2+\sqrt{5},$$

y se verifica para todos los enteros $n \in \{0,1,2,3,4\}$. De entre estos valores, sólo para $n=3$, se obtiene que $x = (3^2-1)/2 = 4$ es entero positivo, y esta es la única solución del problema, ya que en este caso $2x+1 = 9$ y entre los números $10, 11, 12, 13$ y 14 no hay ningún cuadrado perfecto.

2. Se colocan $2n+1$ fichas, blancas y negras, en una fila ($n \geq 1$). Se dice que una ficha está *equilibrada* si el número de fichas blancas a su izquierda, más el número de fichas negras a su derecha es n. Determina, razonadamente, si el número de fichas que están equilibradas es par o impar.

Solución. Numeramos las posiciones en la fila desde 1 hasta $2n+1$, de izquierda a derecha. Definimos la valoración de una cierta posición $k = 1, 2, \cdots, 2n+1$ como el número de fichas blancas a su izquierda más el número de fichas negras a su derecha, con lo que una ficha está equilibrada si y sólo si su valoración es igual a n.

Supongamos que las fichas en posiciones k y $k+1$ tienen distinto color. El número de fichas blancas a su izquierda en las posiciones $1, 2, \cdots, k-1$ y el número de fichas negras a su derecha en las posiciones $k+2, k+3, \cdots, 2n+1$ son los mismos para ambas. La suma de estas dos cantidades es la valoración común de ambas si la ficha en posición k es negra y la ficha en posición $k+1$ es blanca; pero en caso contrario, la ficha negra en $k+1$ tiene una ficha blanca adicional a su izquierda, y la ficha blanca en posición k tiene una ficha negra adicional a su derecha, con lo que la valoración de estas dos fichas es en cualquiera de los dos casos la misma.

Tenemos entonces que, sean cuales sean sus colores, si intercambiamos las fichas en posiciones k y $k+1$, la paridad del número de fichas equilibradas no varía. En efecto, la valoración de las fichas en las posiciones $1, 2, \cdots, k-1$ y en las posiciones $k+2, k+3, \cdots, 2n+1$ no varían con el cambio, si las fichas en posiciones k y $k+1$ tienen el mismo color simplemente intercambian sus valoraciones, y si tienen distinto color, entonces ambas tienen la misma valoración antes del cambio, y ambas tienen la misma valoración después del cambio, luego el número de fichas equilibradas permanece constante, puede aumentar en 2, o reducirse en 2.

Como toda permutación se puede descomponer en intercambios sucesivos de elementos contiguos, la paridad del número de fichas equilibradas no cambia cuando situamos todas las fichas negras en las primeras posiciones de la fila, y todas las blancas en las últimas posiciones de la fila.

Sea a el número de fichas negras y b el de fichas blancas, con la condición de que $a+b=2n+1$. Representamos la fila de fichas blancas y negras mediante un camino en el interior de un rectángulo $a \times b$, que empieza por la esquina inferior izquierda del rectángulo. La fila se recorre de izquierda a derecha. Si la ficha es negra se marca un paso unidad hacia arriba, y si es blanca, un paso unidad hacia la derecha. Se considera el segmento L que une dos lados paralelos del rectángulo, pasa por su centro O, y forma ángulos de $45°$ con los lados del mismo. El rectángulo queda así dividido por L en dos polígonos simétricos respecto del punto O. Y las fichas equilibradas corresponden precisamente a los pasos del camino que cruzan L. Si consideramos la fila con todas las fichas negras al principio de la fila a la izquierda de las fichas blancas (lo cual no altera la paridad del número de fichas equilibradas), entonces el correspondiente camino es formado por el lado vertical del rectángulo y el lado superior del mismo. Así L corta una vez al camino y por tanto el número de fichas equilibradas es impar.

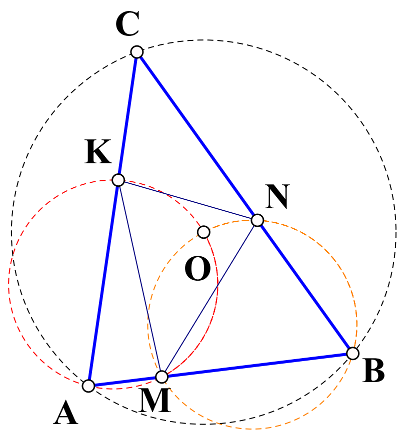
3. Sea O el circuncentro del triángulo acutángulo ABC y sea M un punto arbitrario del lado AB. La circunferencia circunscrita al triángulo AMO interseca por segunda vez a la recta AC en el punto K y la circunferencia circunscrita al triángulo BOM interseca por segunda vez a la recta BC en el punto N. Prueba que

$$\text{Área}\,(MNK) \geq \frac{1}{4}\,\text{Área}\,(ABC)$$

y determina el caso en que se alcanza la igualdad.

Solución. Utilizaremos las notaciones habituales en Geometría del triángulo (R, radio de la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$, O su incentro; a longitud del lado BC del triángulo ABC, etc.). Sea $\dfrac{MA}{MB} = k > 0$, entonces

$$k+1 = \frac{MA+MB}{MB} = \frac{c}{MB} \Rightarrow MB = \frac{c}{k+1}$$



En lo que sigue utilizaremos el parámetro k para fijar la posición del punto M en el segmento AB. Si $\alpha = \angle MNB = \angle MOB$ y $\beta = \angle MOA = \angle MKA$ entonces $\alpha+\beta = 2C$. Sean r_1 y r_2 los radios de las circunferencias circunscritas a los triángulos OMA y OMB, respectivamente. Aplicando el teorema de los senos generalizado en los dos triángulos OMB y OMA, habida cuenta que $\angle OMA + \angle OMB = 180°$, resulta

$$\frac{OA}{\sin \angle OMA} = 2\,r_1 \quad \text{y} \quad \frac{OB}{\sin \angle OMB} = 2\,r_2$$

De lo anterior se deudce que $r_1 = r_2$ ya que $OA = OB = R$ y los ángulos $\angle OMA$ y $\angle OMB$ son suplementarios.

Aplicando el teorema de los senos a los triángulos MAK y MNB, se obtiene

$$\frac{MK}{\sin A} = 2\,r_1 \quad \text{y} \quad \frac{MN}{\sin B} = 2\,r_2$$

De lo anterior, resulta

$$\frac{MK}{\sin A} = \frac{MN}{\sin B} \Rightarrow \frac{MK}{a} = \frac{MN}{b} \tag{1}$$

Por otra parte, se verifica que $\angle KMA = 180^\circ - (\beta + A)$ y $\angle NMB = 180^\circ - (\alpha + B)$. Entonces,

$$\angle KMN = 180^\circ - (\angle NMB + \angle KMA) = C \tag{2}$$

De (1) y (2) se deduce que los triángulos MNK y ABC son semejantes y que MN es el lado homólogo de b en la semejanza. Entonces, para el cociente entre las áreas, se tiene

$$\frac{[MNK]}{[ABC]} = \frac{MN^2}{b^2}$$

En los triángulos MOB y MNB se tiene

$$\frac{MB}{\sin \alpha} = \frac{OM}{\sin(90^\circ - C)} = \frac{MN}{\sin B} \Rightarrow MN = \frac{OM \cdot \sin B}{\cos C}$$

Además, aplicando el Teorema del Coseno al triángulo MOB, resulta

$$OM^2 = MB^2 + R^2 - 2\,MB \cdot R \cdot \cos(90^\circ - C) = MB^2 + R^2 - 2\,MB \cdot R \cdot \sin C$$

Teniendo en cuenta que $c = 2R\sin C$, entonces

$$\begin{aligned} MN^2 &= \frac{\sin^2 B}{\cos^2 C}\left(\frac{c^2}{(k+1)^2} + R^2 - \frac{c^2}{k+1}\right) \\ &= \frac{\sin^2 B}{\cos^2 C}\left(R^2 - \frac{c^2 k}{(k+1)^2}\right) \\ &= \frac{\sin^2 B}{\cos^2 C}\left(\frac{R^2(k+1)^2 - 4R^2\sin^2 C}{(k+1)^2}\right) \end{aligned}$$

Llevando esto al cociente entre las áreas de los triángulos MNK y ABC y teniendo en cuenta que $b = 2R\sin B$, se obtiene

$$\frac{[MNK]}{[ABC]} = \frac{MN^2}{b^2} = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\sin^2 B}{\cos^2 C} \cdot R^2 \cdot \frac{(k+1)^2 - 4k\sin^2 C}{(k+1)^2}$$

$$= \frac{(k-1)^2 + 4k\cos^2 C}{4(k+1)^2\cos^2 C}$$

Dado que $\cos^2 C < 1$, entonces se verifica que

$$\frac{[MNK]}{[ABC]} > \frac{\cos^2 C\,[(k-1)^2+4k]}{4(k+1)^2\cos^2 C} = \frac{1}{4}$$

El cociente entre las áreas es igual a $1/4$ para $k = 1$, es decir, cuando M es el punto medio del segmento AB.

4. Los puntos de una superficie esférica de radio 4, se pintan con cuatro colores distintos. Prueba que existen dos puntos sobre la superficie que tienen el mismo color y que están a distancia $4\sqrt{3}$ o bien a distancia $2\sqrt{6}$.
NOTA: *La distancia entre dos puntos es la distancia euclídea; es decir la longitud del segmento rectilíneo que los une.*

Solución. Dado que se pintan los puntos de la esfera con cuatro colores distintos, para resolver el problema será suficiente con encontrar cinco puntos distintos que cumplan las condiciones del enuciado y aplicar el Principio del Palomar.

Esto puede hacerse, por ejemplo, observando que si inscribimos un triángulo equilátero en una circunferencia de diámetro máximo de la esfera, entonces el lado de dicho triángulo mide $4\sqrt{3}$, y que tomando dos de tales triángulos, contenidos en planos perpendiculares y que tengan un vértice común, los vértices no comunes distan entre sí $2\sqrt{6}$. En efecto, en un sistema de coordenadas cartesianas con origen en el centro de la esfera, la superficie de ésta viene dada por los puntos cuyas coordenadas (x, y, z) satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Sobre esta superficie, consideremos los siguientes puntos $A(4, 0, 0), B(-2, 2\sqrt{3}, 0), C(B(-2, -2\sqrt{3}, 0)$ que están sobre la circunferencia

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z)\,|\,x^2 + y^2 = 16, z = 0\}$$

y son los vértices de un triángulo equilátero de lado $4\sqrt{3}$. Igualmente, los puntos $A(4, 0, 0), D(-2, 0, 2\sqrt{3}), E(B(-2, 0, -2\sqrt{3})$ son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia

$$\Gamma_2 = \{(x, y, z)\,|\,x^2 + z^2 = 16, y = 0\}$$

Nótese que los planos de las circuneferencias Γ_1 y Γ_2 son perpendiculares, que los triángulos equiláteros tienen el vértice común A, y que

$$AB = AC = AD = AE = BC = DE = 4\sqrt{3} \text{ y } BD = BE = CD = CE = 2\sqrt{6}$$

Luego cada uno de estos cinco puntos A, B, C, D, E está a distancia $4\sqrt{3}$ o a distancia $2\sqrt{6}$ de cada uno de los cuatro restantes, y por el principio del palomar, hay dos del mismo color, como queríamos demostrar.

5. Sean a y b dos números positivos primos entre sí. Se dice que un entero positivo n es *débil* si no puede ser escrito en la forma $n = ax + by$, para algunos enteros x e y no negativos. Prueba que si n es débil y $n < \frac{ab}{6}$, entonces existe un entero $k \geq 2$, tal que kn es débil.

Solución. Trivialmente se observa que la suma de enteros positivos no débiles es no débil. Esto motiva considerar para cada entero positivo n los enteros $2n$ y $3n$. Si ambos no son débiles, entonces kn no es débil para cada $k \geq 2$, ya que kn puede ser escrito en la forma $2nr + 3ns$ para algunos enteros no negativos r y s.

Sea n un entero positivo *débil* y supongamos que $2n$ y $3n$ son no débiles, con $2n = ax_1 + by_1$ y $3n = ax_2 + by_2$. Entonces

$$0 = 2(3n) - 3(2n) = a(2x_2 - 3x_1) + b(2y_2 - 3y_1) \tag{3}$$

y

$$n = 3n - 2n = a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) \tag{4}$$

De (4) por ser n débil, resulta que $x_2 < x_1$ o $y_2 < y_1$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x_2 < x_1$. Entonces $2x_2 - 3x_1 < 0$, y por (3), $2y_2 - 3y_1 > 0$. Como a y b son primos entre sí, (3) también implica que $a \mid (2y_2 - 3y_1)$, y así $a \leq 2y_2 - 3y_1 \leq 2y_2$. Concluimos que

$$3n = ax_2 + by_2 \geq by_2 \geq \frac{ab}{2} \Rightarrow n \geq \frac{ab}{6}$$

Esto prueba que si n es débil y $n < \frac{ab}{6}$, entonces existe un entero $k \geq 2$, tal que kn es débil. (La desigualdad en el enunciado debe de ser estricta, como muestra el ejemplo $n = 1$, $a = 2$, $b = 3$).

6. Sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos. Halla todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, tales que $f(x + f(y)) = yf(xy + 1)$, para todo $x, y > 0$.

Solución. Supongamos que exista un número real y tal que $y - 1$ y $f(y) - 1$ son ambos no nulos y del mismo signo. Entonces podemos tomar el número real positivo

$$x = \frac{f(y) - 1}{y - 1}$$

de donde se obtiene$f(y) = x(y - 1) + 1$ y $x + f(y) = xy + 1$. Por tanto, $f(x + f(y)) = f(xy + 1)$ y utilizando el enunciado, resulta

$$y = \frac{f(x + f(y))}{f(xy + 1)} = 1$$

Esto es una contradicción, y por tanto, $y-1$ y $f(y)-1$ no puden ser ambos no nulos ni tener el mismo signo. Es decir, $f(y) \geq 1$ para todo $y < 1$, y $f(y) \leq 1$ para todo $y > 1$.

Para todo $y > 1$, tomemos el número real $x = (y-1)/y > 0$. Entonces, se tiene que

$$f\left(\frac{y-1}{y} + f(y)\right) = y\,f(y)$$

Ahora distinguimos dos casos:

- Si $yf(y) > 1$, entonces $\dfrac{y-1}{y} + f(y) \leq 1$, luego $yf(y) \leq 1$, contradicción.
- Si $yf(y) < 1$, entonces $\dfrac{y-1}{y} + f(y) \geq 1$, luego $yf(y) \geq 1$, contradicción.

Por tanto, $yf(y) = 1$ para todo $y > 1$ y $f(y) = \dfrac{1}{y}$.

Sea ahora $y \leq 1$, y tomemos $x = 1$. Se tiene entonces que tanto $x + f(y) = 1 + f(y)$ como $xy + 1 = y + 1$ son números reales mayores que 1, con lo que

$$\frac{1}{x + f(y)} = \frac{y}{xy+1} \Leftrightarrow xy + 1 = xy + yf(y)$$

y concluímos que $f(y) = \dfrac{1}{y}$ también para todo $y \leq 1$. Luego la única función que puede satisfacer las condiciones del enunciado es $f(y) = \dfrac{1}{y}$. Vemos además que

$$f(x + f(y)) = f\left(\frac{xy+1}{y}\right) = \frac{y}{xy+1} = yf(xy+1),$$

luego en efecto $f(y) = \dfrac{1}{y}$ es solución, y no puede haber otras.

Agradecimientos

Agradecemos a los proponentes de los problemas sus contribuciones para formar la Lista Corta de la que se han seleccionado los seis Problemas de la competición y al profesor Juan Manuel Conde y sus colaboradores por la selección de los mismos.